# Numerische Lösungsverfahren

Mitschrift der Vorlesung von Prof. Thalhofer im SS 2000

Christian Hampp

Inhaltsverzeichnis

# Numerische Lösungsverfahren

## 1. Allgemeines

Aufgabenstellung: Konstruktion einer Welle

Lösung:
- analytische Lösung
  - nur für einfache Bauteile und Randbedingungen
- Messung (Versuch)
  - teuer
  - Randbedingungen schwer realisierbar
  - punktuell
  - oft verkleinerte Modelle
- numerische Analyse
  - komplexe Geometrie aufwändig
  - Materialparameter unbekannt
  - mathematisches Modell nicht vorhanden
  - hohe Rechenzeiten

## 2. Einführung in die FEM

FEM = **F**inite **E**lemente **M**ethode

### *2.1 Grundsätzliches*

Grundgedanke: Zerlegung eines komplexen Bauteils in einfache Elemente. Je kleiner die Elemente, desto besser die Annäherung an die exakte Lösung.

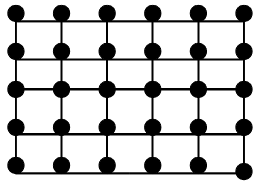
Voraussetzung:
- Die Summe der Eigenschaften der Elemente muss die Eigenschaft des gesamten Bauteils widerspiegeln.
- Die Elementberandungen dürfen weder klaffen noch überlappen.

Mathematik: Problemstellungen → mathematisches Modell → Dgl. → Näherungslösung durch numerische Verfahren (FEM)

Geschichte: Zienkiewicz / Argyris
1956 Turner, Clough, Gallagher

**Anwendungsgebiete:**
- Festigkeitsprobleme (Statik, Dynamik)
- Stabilität (Knicken, Beulen)
- Feldprobleme (Potenzialprobleme, Wärmeleitung, Sickerströmung)

- allgemeine Wärmeprobleme (Konvektion)
- Strömungsmechanik (Windkanal)



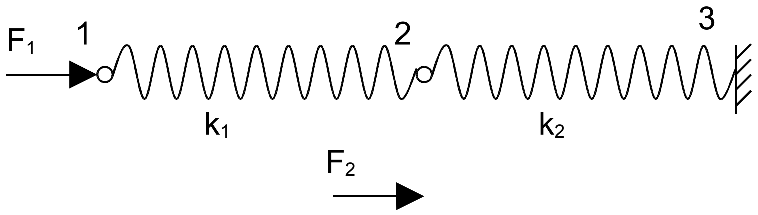
**Vorgehensweise:**
lineare Elastostatik

Kontinuum wird durch Netz von Knotenpunkten ersetzt.

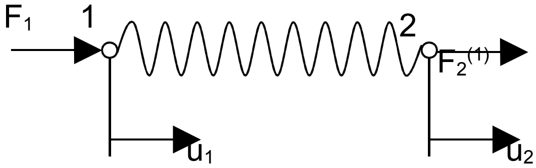
Nachteil: Randbedingungen (Lasten, Lagerungen) nur an den Knoten.
→Ergebnisse auch an den Knoten

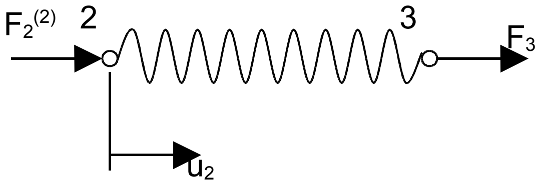
Gleichungssystem zwischen den Lasten und Verschiebungen → Verzerrungen → Spannungen

### *2.2 Der einfachste Fall: Federn*




$k_1$, $k_2$: Federkonstanten




$u_1 > u_2$ : Druckkraft $F_1 = k_1\,(u_1 - u_2)$
Gleichgewicht: $F_1 = -F_2^{(1)}$; $F_2^{(1)} = k_1\,(-u_1 + u_2)$

Feder 1: $$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Feder 2: $$\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

kurz: $\underline{F}^{(1)} = \underline{k}^{(1)} \cdot \underline{u}^{(1)}$

Gleichgewicht: $F_1 = -F_2^{(1)}$;     $F_2^{(1)} = k_1\,(-u_1 + u_2)$

$F_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} = k_1\,(-u_1 + u_2) + k_2\,(u_2 - u_3) =$
$= -k_1 \cdot u_1 + (k_1 + k_2) \cdot u_2 - k_2 \cdot u_3$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 \\ \hline 0 & -k_2 & k_2 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \underline{\underline{k}} \cdot \underline{u}$$

=0

Gesamtsteifigkeitsmatrix     Starrkörperverschiebungen (ohne Lagerung)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

- symmetrisch
- quadratisch
- Bandstruktur
- singulär

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & (k_1+k_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$F_1 = k_1 \cdot u_1 - k_1 \cdot u_2$     $u_1 = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \cdot F_1 + \frac{1}{k_2} \cdot F_2$

$$\Rightarrow$$

$F_2 = -k_1 \cdot u_1 + (k_1 + k_2) \cdot u_2$     $u_2 = \frac{1}{k_2} \cdot F_1 + \frac{1}{k_2} \cdot F_2$

**Reaktionskraft:** $F_3 = \begin{bmatrix} 0 & -k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cc|cc} & & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2} \\ & & \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2} \\ \hline 0 & -k_2 & -1 & -1 \end{array}$$

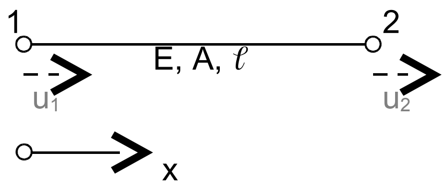
$$F_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = -(F_1 + F_2)$$

**Zusammenfassung:**

- Federsystem in Elemente aufteilen (Knoten!)
- Elementsteifigkeitsmatrix für jede Feder
- Gesamtsteifigkeitsmatrix
- Lagerungen $\rightarrow$ **reduziertes System**
- Knotenverschiebungen
- Lagerreaktionen

### *2.3 Alternative Herleitung der Steifigkeitsmatrix für den Stab*

Stabelement

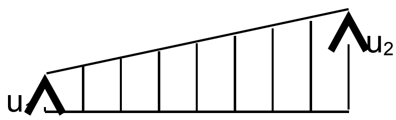



u(x) = ?

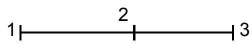
$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x;$ $\quad u(0) = u_1; \quad u(\ell) = u_2$

$u(0) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 = u_1;$ $\quad \alpha_1 = u_1$

$u(\ell) = u_1 + \alpha_2 \cdot \ell = u_2;$ $\quad \alpha_2 = \frac{1}{\ell}(u_2 - u_1)$




$$u(x) = u_1 + \frac{1}{\ell}(u_2 - u_1) \cdot x = (1 - \frac{x}{\ell})u_1 + \frac{x}{\ell} \cdot u_2$$

[quadratisch: $u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2$ 

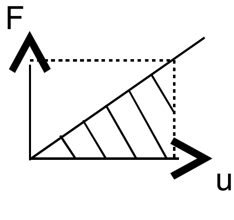
]

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{\ell} & \frac{x}{\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad u(x) = \underline{N}^T \cdot u \qquad \underline{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{\ell} \\ \frac{x}{\ell} \end{bmatrix};$$

**Formfunktion** $\underline{N}^T$

Stab: äußere Arbeit W $\quad$ innere Arbeit $W_i$

äußere Arbeit:




$$W = \tfrac{1}{2}\underline{F}^T \cdot \underline{u} = \tfrac{1}{2}\underline{u}^T \cdot \underline{F} = \tfrac{1}{2}\underline{u}^T \cdot \underline{k} \cdot \underline{u}$$

$$\underline{F} = \underline{k} \cdot \underline{u}$$

innere Arbeit: $\quad W_i = \tfrac{1}{2}\underline{F}^T \cdot \underline{\Delta\ell} = \tfrac{1}{2}\underline{\sigma}^T \cdot A \cdot \underline{\Delta\ell} = \tfrac{1}{2}\underline{\sigma}^T \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \ell \cdot A$

$\underline{\sigma} = E \cdot \underline{\varepsilon}$ (HOOKEsches Gesetz)

$\underline{\varepsilon} = \frac{d\underline{u}}{dx}$ $\quad$ $u(x) = \underline{N}^T \cdot \underline{u}$ $\quad$ $\underline{\varepsilon} = \frac{d\underline{N}^T}{dx} \cdot \underline{u} = B^T \cdot u$

$\underline{B}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\ W_i = \tfrac{1}{2}\underline{u}^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{B}^T \cdot \underline{u} \cdot \ell \cdot A \cdot \underline{E}$$

$$W = W_i \Rightarrow \underline{u}^T \cdot \boxed{\underline{k}} \cdot \underline{u} = \underline{u}^T \cdot \boxed{\ell \cdot A \cdot E \cdot \underline{B} \cdot \underline{B}^T} \cdot \underline{u}$$

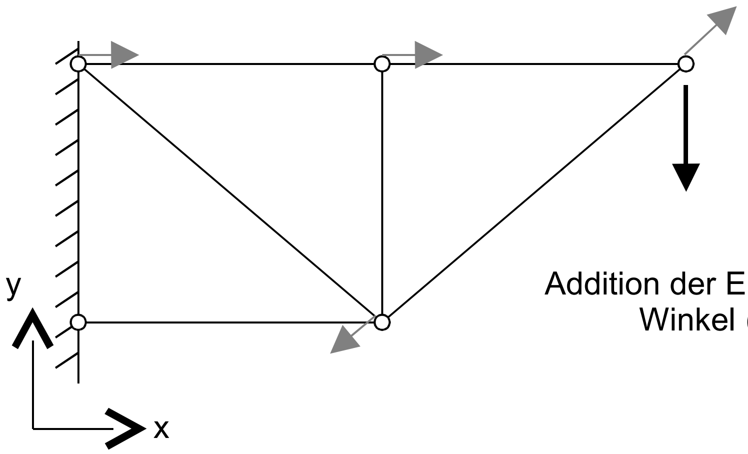
$\underline{B} \cdot \underline{B}^T = ?$

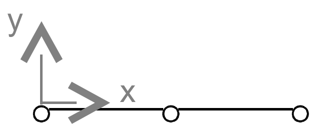
| | $-\frac{1}{\ell}$ | $\frac{1}{\ell}$ |
|---|---|---|
| $-\frac{1}{\ell}$ | $\frac{1}{\ell^2}$ | $-\frac{1}{\ell^2}$ |
| $\frac{1}{\ell}$ | $-\frac{1}{\ell^2}$ | $\frac{1}{\ell^2}$ |

$$\underline{k} = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k} = \ell \cdot A \cdot E \cdot \underline{B} \cdot \underline{B}^T$$

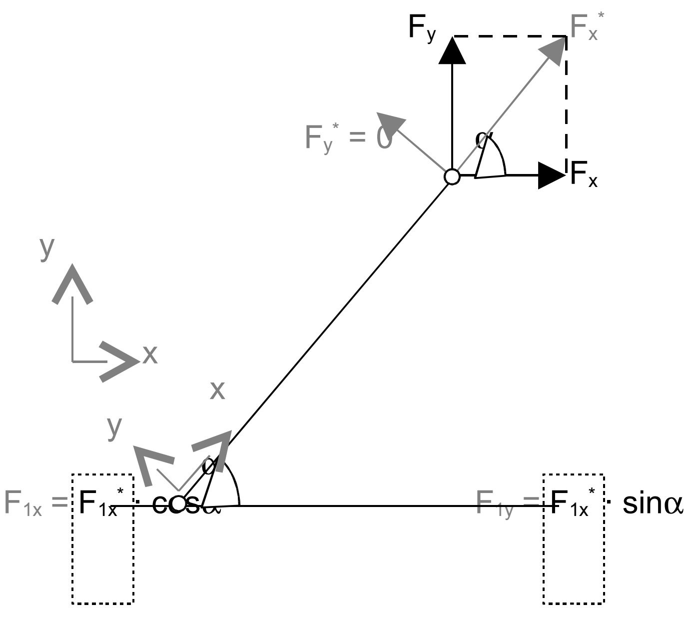
### *2.4 Anwendung auf das ebene Fachwerk*




Addition der Elementsteifigkeitsmatrizen?
Winkel (Lage der Stäbe)

$$\underline{k}^* = \frac{E \cdot A}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ Elementsteifigkeitsmatrix im lokalen Koordinatensystem



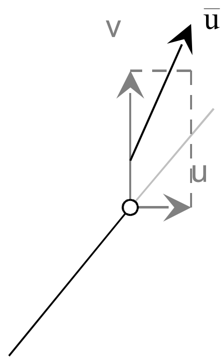

$$F_{1x}^* = \frac{E \cdot A}{\ell}(u_1^* - u_2^*);[2.2]$$

$$F_{2x}^* = \frac{E \cdot A}{\ell}(-u_1^* + u_2^*)$$

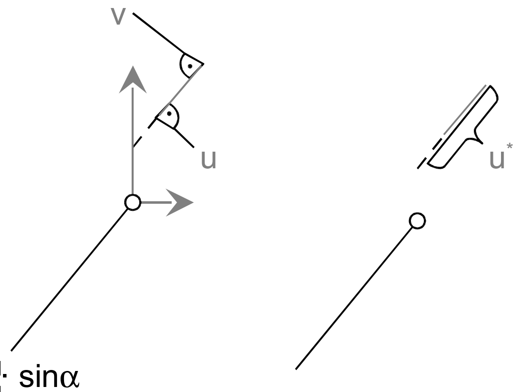
$$F_{1y}^* = F_{2y}^* = 0$$

$F_{2x} = F_{2x}^{*} \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $F_{2y} = F_{2x}^{*} \cdot \sin\alpha$

$u_1^{*} = ?$ $\qquad$ $u_2^{*} = ?$




Verschiebung $\bar{u}$ in globale Komponenten zerlegen




$u_1^{*} = \boxed{u_1} \cdot \cos\alpha + \boxed{v_1} \cdot \sin\alpha$

$u_2^{*} = u_2 \cdot \cos\alpha + v_2 \cdot \sin\alpha$

$$F_{1x} = \frac{E \cdot A}{\ell}(u_1 \cdot \cos\alpha + v_1 \cdot \sin\alpha - u_2 \cdot \cos\alpha - v_2 \cdot \sin\alpha) \cdot \cos\alpha$$

$$F_{1y} = \frac{E \cdot A}{\ell}(u_1 \cdot \cos\alpha + v_1 \cdot \sin\alpha - u_2 \cdot \cos\alpha - v_2 \cdot \sin\alpha) \cdot \sin\alpha$$

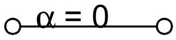
$$F_{2x} = \frac{E \cdot A}{\ell}(-u_1 \cdot \cos\alpha - v_1 \cdot \sin\alpha + u_2 \cdot \cos\alpha + v_2 \cdot \sin\alpha) \cdot \cos\alpha$$

$$F_{2y} = \frac{E \cdot A}{\ell}(-u_1 \cdot \cos\alpha - v_1 \cdot \sin\alpha + u_2 \cdot \cos\alpha + v_2 \cdot \sin\alpha) \cdot \sin\alpha$$

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{\ell} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ \cos\alpha \cdot \sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ -\cos\alpha \cdot \sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

**Elementsteifigkeitsmatrix für den Stab im globalen System**

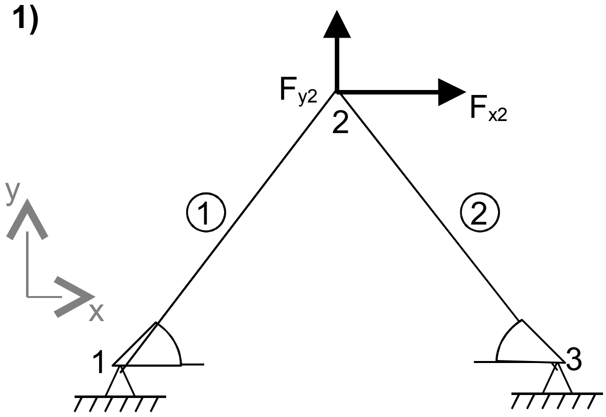
$$\underline{k_2} = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$




$$\frac{E \cdot A}{\ell} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

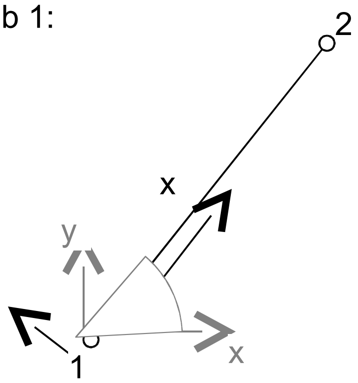
**Beispiele:**

**1)**




$\alpha = 45°$
Stab 1: A, $\ell$, E
Stab 2: A, $\ell$, E

Stab 1:



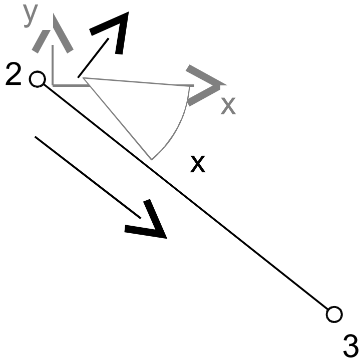

$\alpha = 45°$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $c^2 = \frac{1}{2}$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $s^2 = \frac{1}{2}$; $c \cdot s = \frac{1}{2}$

$$\underline{k_1} = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Stab 2:




$\alpha = -45°$

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $c^2 = \frac{1}{2}$

$\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $s^2 = \frac{1}{2}$; $c \cdot s = -\frac{1}{2}$

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | | 1 |
| | 1 | 1+2 | 2 | 2 |
| | | 2 | 2 | 3 |

$$\underline{K} = \frac{E \cdot A}{2 \cdot \ell} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & & \\ 1 & 1 & -1 & -1 & & \\ -1 & -1 & 1+1 & 1-1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1-1 & 1+1 & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{2 \cdot \ell} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

reduziertes System:

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{2 \cdot \ell} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$F_{2x} = 2 \cdot \frac{E \cdot A}{2 \cdot \ell} \cdot u_2; \quad u_2 = \frac{F_{2x} \cdot \ell}{E \cdot A}$$

$$F_{2y} = 2 \cdot \frac{E \cdot A}{2 \cdot \ell} \cdot v_2; \quad v_2 = \frac{F_{2y} \cdot \ell}{E \cdot A}$$

Reaktionskräfte:

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{2 \cdot \ell} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$F_{1x} = -\frac{1}{2}(F_{2x} + F_{2y}); \qquad F_{1y} = F_{1x}$$

$$F_{3x} = -\frac{1}{2}(F_{2x} - F_{2y}); \qquad F_{3y} = -F_{3x}$$

Stabkräfte:

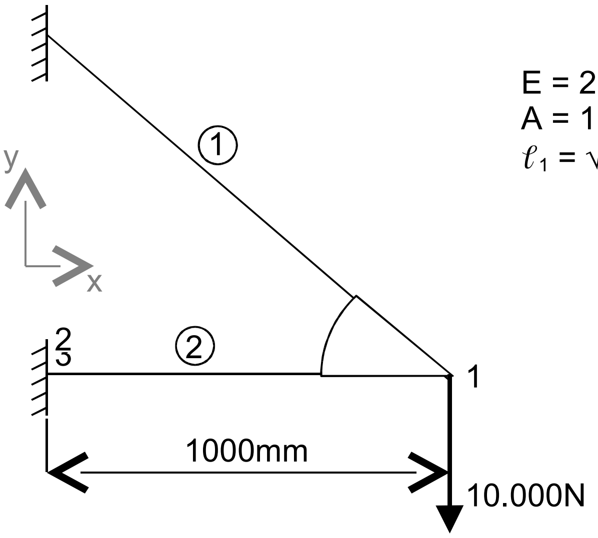
$$S_{1\div 2} = k \cdot \Delta\ell = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot (u_2^* - u_1^*) = \frac{E \cdot A}{\ell}(u_2 \cdot \cos\alpha + v_2 \cdot \sin\alpha - \overset{0}{u_1} \cdot \cos\alpha - \overset{0}{v_1} \cdot \sin\alpha) =$$

$$\underset{\alpha = 45^\circ}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{E \cdot A}{\ell}(u_2 + v_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_{2x} + F_{2y})$$

$$S_{2\div 3}=\frac{E\cdot A}{\ell}\cdot(u_3^{*}-u_2^{*})=\frac{E\cdot A}{\ell}(\overset{0}{u_3}\cdot\cos\alpha+\overset{0}{v_3}\cdot\sin\alpha-u_2\cdot\cos\alpha-v_2\cdot\sin\alpha)=$$

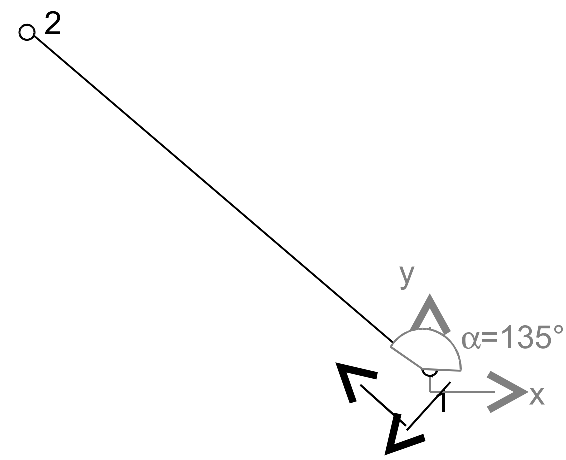
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{E\cdot A}{\ell}(-u_2+v_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(-F_{2x}+F_{2y})$$

**2)**




E = 210.000 N/mm$^2$
A = 112 mm$^2$
$\ell_1=\sqrt{2}\cdot\ell_2$

Stab 1: 1→2

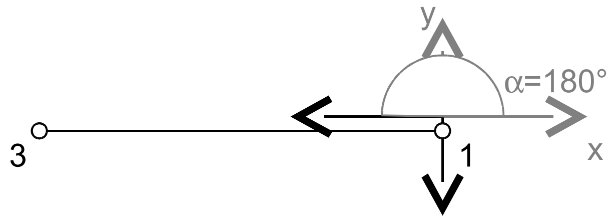



cosα = -0,7;  sinα = 0,7

cos$^2$α = sin$^2$α = 0,5
sinα · cosα = 0,5

$$\underline{k_1}=\frac{E\cdot A}{\sqrt{2}\cdot\ell_2}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}w&-w&-w&w\\-w&w&w&-w\\-w&w&w&-w\\w&-w&-w&w\end{bmatrix}\qquad w=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Stab 2: 1→3




$\cos\alpha = -1; \quad \sin\alpha = 0$

$\cos^2\alpha = 1; \quad \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$

| 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| 1+2 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | | 2 |
| 2 | | 2 | 3 |

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{\ell} \begin{bmatrix} w+1 & -w & -w & w & -1 & 0 \\ -w & w & w & -w & 0 & 0 \\ -w & w & w & -w & & \\ w & -w & -w & w & & \\ -1 & 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -10.000 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{\ell} \begin{bmatrix} w+1 & -w \\ -w & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}; \qquad u_1 = -0{,}425\text{mm}; \qquad v_1 = -1{,}627\text{mm}$$

Reaktionskräfte:

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{\ell} \begin{bmatrix} -w & w \\ w & -w \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$F_{2x} = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot w(-u_1 + v_1) = -10.000\text{N}$$

$$F_{2y} = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot w(u_1 - v_1) = 10.000\text{N}$$

$$F_{3x} = \frac{E \cdot A}{\ell}(-u_1 + 0 \cdot v_1) = 10.000\text{N}$$

$$F_{3y} = 0$$

Stabkräfte:

$$S_{(1)} = \frac{E \cdot A}{\ell\sqrt{2}}(u_2^* - u_1^*) = \frac{E \cdot A}{\ell\sqrt{2}}((u_2 - u_1)\cdot\cos\alpha + (v_2 - v_1)\cdot\sin\alpha)$$

$$S_{(1)} = 14.142\,N$$

$$S_{(2)} = \frac{E \cdot A}{\ell}(u_3^* - u_1^*) = -10.000\,N$$

### *2.5 FE – Computerprogramme*

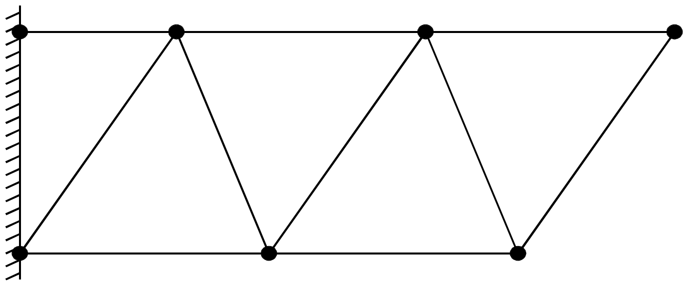
3 Phasen:
- Preprocessing (Modellaufbereitung)
- Berechnungsphase
- Postprocessing (Ergebnisaufbereitung)

programmtechnisch: Pre- und Postprocessing (1 Programm: Preprocessor, z.B. Femap)
Analyse (1 Programm, z.B. Nastran)

| **Preprocessing** | **Berechnungsphase** | **Postprocessing** |
|---|---|---|
| • Geometrie $\rightarrow$ FE – Netz (Knoten, Elemente)<br>• Materialwerte, physikalische Werte (Querschnitte, Blechdicke)<br>• Randbedingungen (Lasten, Lager) | • Bandbreitenoptimierung<br>• Elementsteifigkeitsmatrizen<br>• Gesamtsteifigkeitsmatrix<br>• Lastvektor<br>• Lagerung $\rightarrow$ reduziertes System<br>• Solver $\rightarrow$ Verschiebungen<br>• Reaktionskräfte (optional)<br>• Spannungen (optional) | • grafische und tabellarische Darstellung der Ergebnisse<br>• Berechnung sekundärer Größen (Lastfallkombinationen, Vergleichs- und Hauptspannungen |

### *2.6 Rechnen mit FE – Programmen*

**Bsp.:**



- Problemanalyse
  mit FE lösbar?
  Geometrie erstellbar?
  Randbedingungen einstellbar?
  vereinfachtes Modell (Stabelemente)
  Symmetrie

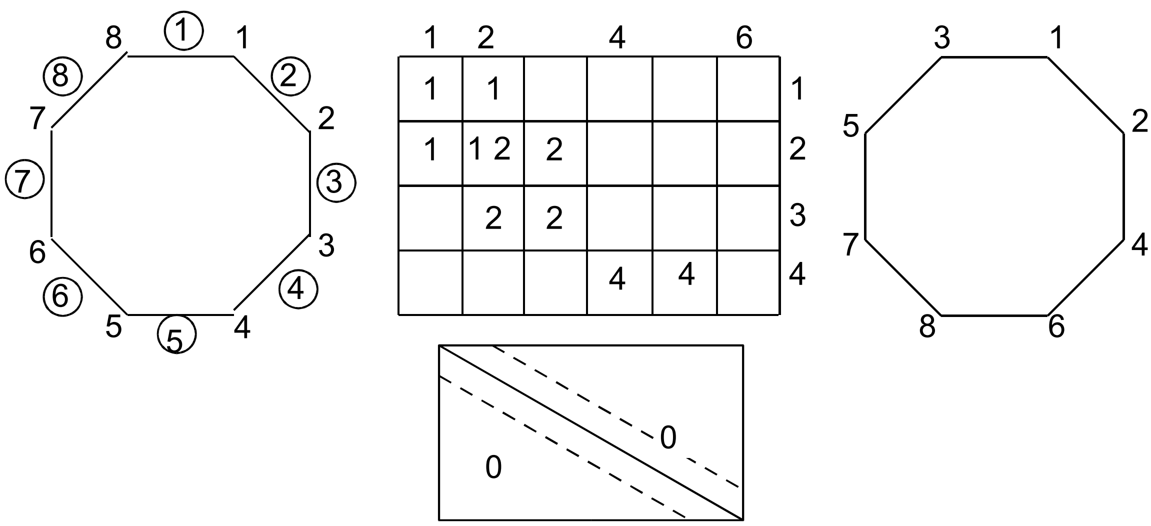
- Genauigkeitsanforderungen; finanzielle Randbedingungen; einfaches Modell

- Personalkosten↑ EDV - Kosten↓

- Welches FE – System?
  NASTRAN, ANSYS, COSMOS / M

- Idealisierung der Struktur
  Vereinfachung → Rechenmodell Stäbe
  Vernetzung: 1 Stab → 1 Element

- Knoten- und Elementnummerierung übernimmt das Programm



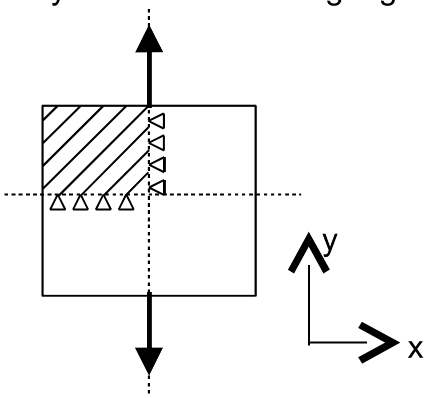

- Bandbreitenoptimierung: Knotennummerndifferenz klein!

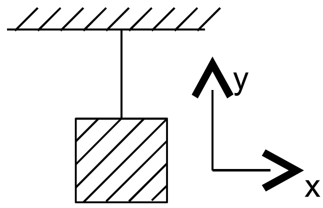
- Materialwerte (E – Modul)

- physikalische Daten (Querschnittsfläche)

Lagerungen und Lasten

Lagernachgiebigkeiten (unendlich steif)
Starrkörperbewegungen ausschließen
Symmetrierandbedingungen




Lagerung in x- und y-Richtung

$F_x = 0$

- weitere Angaben für die Berechnung
  - Analyseart (Statik)
  - Elementtyp (TRUSS2D) ROD

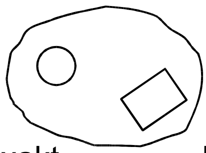
- Darstellung der Ergebnisse
  - verformte Struktur, Stabkräfte

- Ergebniskontrolle
  - Verformungen tendenziell richtig?
  - Spannungskonzentrationen
    (Querschnittsänderungen)
  - analytisch abschätzen
  - Gleichgewicht
  - Messungen

### *2.7 Matrixmethode und FEM*

Matrixmethode: Stab, Balken
Steifigkeitsmatrix exakt

FEM: Kontinuum
- Blechteil
→ Dreiecke, Vierecke
- Steifigkeitsmatrix nicht exakt



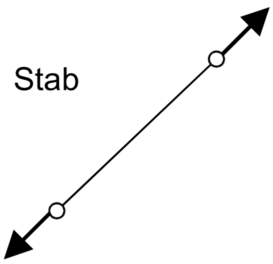
height

- Genauigkeit↑ Elemente klein (h – Methode)
Ansatz erhöhen (p – Methode)

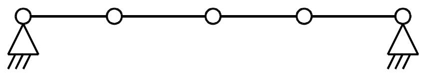
polynom

**Elementtypen:**

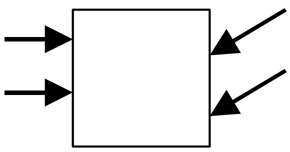
Stab



Balken



**ebene Elemente:**
(Dreiecke/ Vielecke)



Belastung in Elementebene
ESZ (dünnes Blech)
EFZ (ebener Formänderungszustand; Schnitt)

**Platten, Schalen:**

**Volumenelemente:**

Belastungen beliebig
Quader, Tetraeder

## 3. Einführung in die FDM

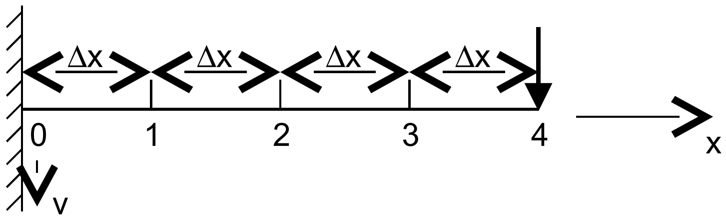
**FDM:** **F**inite **D**ifferenzen **M**ethode

$\rightarrow$ näherungsweise Lösen von Differentialgleichungen

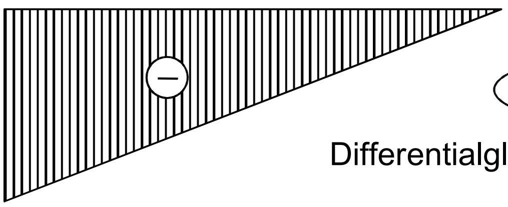
Differentialquotient $\dfrac{df(x)}{dx} \rightarrow$ Differenzenquotient $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Kontinuum $\rightarrow$ Gitterpunkte

**Bsp.:** Biegebalken (gerade Biegung)




$E \cdot I$ = Biegesteifigkeit = konstant

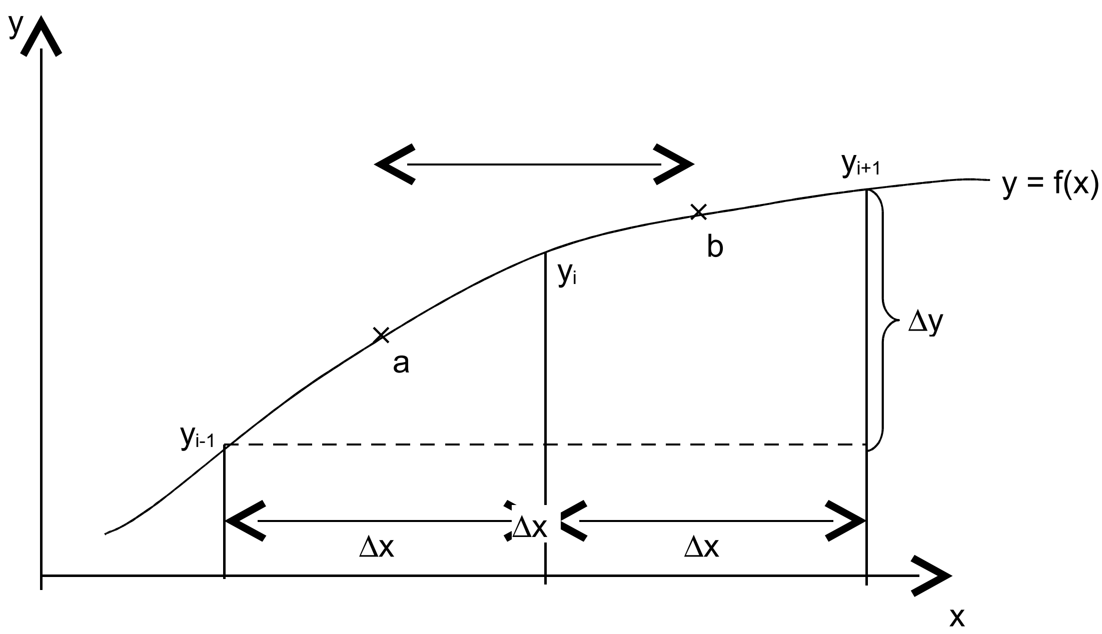


$M(x) = -F\,(\ell - x)$

Differentialgleichung:

$$v''(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I}$$

**Herleitung der zentralen Differenzenformel**



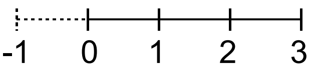
$$y_i' = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \qquad y_i' = \frac{1}{2\Delta x}\left(-y_{i-1} + y_{i+1}\right)$$

$$y_i'' \approx \left(\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)_i = \frac{y_b' - y_a'}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{\frac{2\Delta x}{2}} \cdot \left(-y_i + y_{i+1}\right) - \frac{1}{\frac{2\Delta x}{2}}\left(-y_{i-1} + y_i\right)\right)$$

$$y_i'' \approx \frac{1}{\Delta x^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$$

$$\left.\begin{aligned} v'' &= -\frac{M(x)}{E \cdot I} \\ v'' &= \frac{1}{\Delta x^2}(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{\Delta x^2}(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) = -\frac{M(x)}{E \cdot I}$$

$$v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1} = \frac{F \cdot \Delta x^2}{E \cdot I}(\ell - x_i) = \frac{F \cdot \ell^3}{E \cdot I} \cdot \frac{\Delta x^2}{\ell^2}\left(1 - \frac{x_i}{\ell}\right)$$




$$\overline{v}_i = \frac{E \cdot I}{F \cdot \ell^3} \cdot v_i$$

$i = 0, 1, 2, 3 \quad \Delta x = \dfrac{\ell}{3}$

$$\overline{v_{i-1}} - 2\overline{v_i} + \overline{v_{i+1}} = \frac{\Delta x^2}{\ell^2}\left(1 - \frac{x_i}{\ell}\right)$$

$i = 0 \quad v_{-1} - 2v_0 + v_1 = \dfrac{1}{9}(1 - 0) = \dfrac{1}{9}$

$i = 1 \quad v_0 - 2v_1 + v_2 = \dfrac{1}{9}\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{27}$

$i = 2 \quad v_1 - 2v_2 + v_3 = \dfrac{1}{9}\left(1 - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$

$i = 3 \quad v_2 - 2v_3 + v_4 = \dfrac{1}{9}(1 - 1) = 0$

4 Gleichungen und 6 Unbekannte

Randbedingungen

$v_0 = 0$

$v_0' = 0$

$v_2' \approx \dfrac{1}{2\Delta x}(-v_{i-1} + v_{i+1})$

$v_0' = \dfrac{1}{2\Delta x}(-v_{-1} + v_1) = 0 \Rightarrow v_{-1} = v_1$

eingesetzt:

$$\left.\begin{array}{ll} i = 0: & 2v_1 = \frac{1}{9} \\ i = 1: & -2v_1 + v_2 = \frac{2}{27} \\ i = 2: & v_1 - 2v_2 + v_3 = \frac{1}{27} \end{array}\right\} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{2}{27} \\ \frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

$$\overline{v}_1 = \frac{1}{18} \qquad \overline{v}_2 = \frac{5}{27} \qquad \overline{v}_3 = \frac{19}{54}$$

Fehler bei $v_3 = v_{max}$ = 5,6%

$\overline{v}_i = \frac{E \cdot I}{F \cdot \ell^3} \cdot v_i \Rightarrow v_i$ ausrechnen

**Vorgehensweise**

- Bauteil diskretisieren
- $\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- lineares Gleichungssystem für Gitterpunkte
- Randbedingungen

**Anwendungsgebiete**

- Platten, Schalen
- Beulen und Knicken
  siehe FEM
- Strömungsmechanik ← früher berechnet mit FDM

**Unterschiede zur FEM**

- komplexe Geometrien nicht vernetzbar
- keine universell einsetzbaren Programme
- 20 Jahre älter als FEM
- relativ einfache Mathematik